

## Calcul intégral

EL KYAL MOHAMED

### ➤ Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$

L'intégrale de  $f$  de  $a$  à  $b$  est le nombre réel :  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

### ➤ Propriétés :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

**Linéarité:**  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$(k \in \mathbb{R}) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

**Relation de Chasles:**  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### ➤ Valeur moyenne :

Soit  $f$  une fonction continue sur segment  $[a; b]$

La valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[a; b]$  est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### ➤ Intégrale et ordre :

si  $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

si  $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

### ➤ Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$$

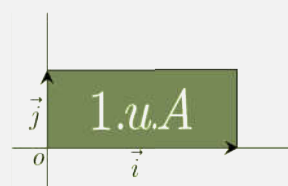
### ➤ Calcul d'aires :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $I$  et  $J$  deux points tels que :  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

L'unité d'aire, notée  $u.A$ , est l'aire du rectangle bâti à partir des points  $O, I$  et  $J$

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



L'aire du domaine délimité par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  est:

$$\left( \int_a^b |f(x)| dx \right) .u.A$$

L'aire du domaine délimité par  $C_f$ ,  $C_g$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  est:

$$\left( \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) .u.A$$

➤ **Cas particuliers :**

Figure illustrative	Remarque	L'aire du domaine hachuré sur la figure
	$f$ est positive sur $[a; b]$	$\left( \int_a^b f(x) dx \right) .u.A$
	$f$ est négative sur $[a; b]$	$\left( \int_a^b -f(x) dx \right) .u.A$
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>f</math> est positive sur <math>[a; c]</math></li> <li><math>f</math> est négative sur <math>[c; b]</math></li> </ul>	$\left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) .u.A$
	$C_f$ est au dessus de $C_g$ sur $[a; b]$	$\left( \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) .u.A$
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>C_f</math> est au dessus de <math>C_g</math> sur <math>[a; c]</math></li> <li><math>C_f</math> est au dessous de <math>C_g</math> sur <math>[c; b]</math></li> </ul>	$\left( \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) .u.A$

➤ **Calcul de volumes :**

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe  $C_f$  sur  $[a; b]$ , un tour complet autour de l'axe des abscisses est:

$$V = \left[ \int_a^b \pi f(x)^2 dx \right] .u.v$$

$u.v$ : unité de volume

